



Aks–Grotendikova teorema III

– Uvod u teoriju modela –

Slavko Moconja

MATF

16.12.2025.

Sa prošlog predavanja

Neka je T $\mathcal{L}$ -teorija i v_0 fiksirana promenljiva.

- T je *konačno potpuna* ako:
 - T je *konačno zadovoljiva*, tj. svaki konačan podskup od T ima model;
 - za svaku $\mathcal{L}$ -rečenicu φ važi:

$$\varphi \in T \text{ ili } \neg\varphi \in T.$$

- T je *Henkinova* ako za svaku $\mathcal{L}$ -formulu $\varphi(v_0)$ postoji konstanta $c \in \mathcal{L}$ takva da:

$$(\exists v_0 \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(c)) \in T.$$

Teorema. Neka je T $\mathcal{L}$ -teorija koja je konačno potpuna i Henkinova. Tada postoji model $\mathcal{A} \models T$ takav da $|A| \leq \|\mathcal{L}\|$.

Dokaz.

- Neka je $C \subseteq \mathcal{L}$ skup simbola konstanti; $C \neq \emptyset$.
- Definišimo na C relaciju $\sim$ sa:

$$c \sim d : \Longleftrightarrow (c = d) \in T.$$

- **Tvrđenje A.** Relacija $\sim$ je ekvivalencija na C .
- *Dokaz tranzitivnosti.* Pp $(c = d), (d = e) \in T$. Kako $\{c = d, d = e, c \neq e\}$ nije zadovoljiv, $\{c = d, d = e, c \neq e\} \notin T$, pa $(c \neq e) \notin T$, odakle $(c = e) \in T$. □

Henkinova konstrukcija cont'd

- Neka je $A := \{[c] : c \in C\}$; primetimo $|A| \leq |C| \leq |\mathcal{L}| \leq \|\mathcal{L}\|$.
- Na skupu A definišemo $\mathcal{L}$ -strukturu $\mathcal{A}$ sa:
 - $c^{\mathcal{A}} = [c]$ za simbol konstante c ;
 - $f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) := [d]$ ako $(f(c_1, \dots, c_n) = d) \in T$ za funkcijski simbol f arnosti n ;
 - $R^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) : \iff R(c_1, \dots, c_n) \in T$ za relacijski simbol R arnosti n .

Henkinova konstrukcija cont'd

- **Tvrđenje B.** Interpretacije funkcijskih i relacijskih simbola su dobro definisane.
- *Dokaz.* Po Henkinovom uslovu za formulu $f(c_1, \dots, c_n) = v_0$ postoji $d \in C$ tako da:

$$(\exists v_0 f(c_1, \dots, c_n) = v_0 \rightarrow f(c_1, \dots, c_n) = d) \in T.$$

Kako

$\{\exists v_0 f(c_1, \dots, c_n) = v_0 \rightarrow f(c_1, \dots, c_n) = d, f(c_1, \dots, c_n) \neq d\}$
nije zadovoljiv, taj skup $\notin T$, tj. $(f(c_1, \dots, c_n) \neq d) \notin T$,
odakle $(f(c_1, \dots, c_n) = d) \in T$.

Henkinova konstrukcija cont'd

- Nezavisnost od izbora. Neka $(c_1 = c'_1), \dots, (c_n = c'_n)$,
 $f(c_1, \dots, c_n) = d, f(c'_1, \dots, c'_n) = d' \in T$.
Kako $\{c_1 = c'_1, \dots, c_n = c'_n, f(c_1, \dots, c_n) = d,$
 $f(c'_1, \dots, c'_n) = d', d \neq d'\}$ nije zadovoljiv, taj skup $\notin T$, tj.
 $(d \neq d') \notin T$, odakle $(d = d') \in T$.
- Slično za interpretacije relacijskih simbola. □

Henkinova konstrukcija cont'd

- **Tvrđenje C.** Za svaki term $t(\bar{x})$ važi $t^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) = [d]$ ako i samo ako $(t(c_1, \dots, c_n) = d) \in T$.
- *Dokaz.* Indukcijom po složenosti terma t .
- **Tvrđenje D.** Za svaku formulu $\varphi(\bar{x})$ važi $\mathcal{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n])$ ako i samo ako $\varphi(c_1, \dots, c_n) \in T$.
- *Dokaz.* Indukcijom po složenosti formule φ .
- **Kraj dokaza.** Specijalno, prema tvrđenju D, za svaku rečenicu φ važi $\mathcal{A} \models \varphi$ ako i samo ako $\varphi \in T$; dakle, $\mathcal{A} \models T$.

Primene kompaktnosti

Donja LST teorema. Zadovoljiva $\mathcal{L}$ -teorija ima model kardinalnosti $\leq \|\mathcal{L}\|$.

Gornja LST teorema. Ako $\mathcal{L}$ -teorija T ima beskonačan model, onda ona ima model kardinalnosti κ za svako $\kappa \geq \|\mathcal{L}\|$.

Primer. Postoji nearhimedovsko polje elementarno ekvivalentno sa $\mathbb{R}$.

Karakterizacija podstrukture. Neka je T teorija i $\mathcal{A}$ struktura. Tada:

$$\mathcal{A} \models T_{\forall} \iff (\exists \mathcal{B} \models T) \mathcal{A} \leq \mathcal{B},$$

gde $T_{\forall} = \{\varphi \in \Pi_1 : T \models \varphi\}$.

Primer. $Fld_{\forall} \equiv ACF_{\forall} \equiv ID$.

Definicija.

(a) $\mathcal{L}$ -teorija T je *potpuna* ako je zadovoljiva i za svaku $\mathcal{L}$ -rečenicu φ važi $T \models \varphi$ ili $T \models \neg\varphi$.

(b) *Teorija strukture* $\mathcal{A}$ je potpuna teorija:

$$Th(\mathcal{A}) = \{\varphi: \varphi \text{ je } \mathcal{L}\text{-rečenica i } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

(c) $\mathcal{L}$ -strukture $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su *elementarno ekvivalentne*, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, ako za svaku $\mathcal{L}$ -rečenicu φ važi $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$.

Ekvivalentno, ako $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

Komentar. T je potpuna $\iff (\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \models T) \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Primer. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Tamo-amo ekvivalencija

Definicija. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$ -strukture, $\bar{a} \in \mathcal{A}^n$ i $\bar{b} \in \mathcal{B}^n$. Pišemo $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_{qf} (\mathcal{B}, \bar{b})$ ako za svaku beskvantornu formulu $\varphi(\bar{x})$ važi:

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathcal{B} \models \varphi(\bar{b}).$$

U tom slučaju kažemo i da je $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ *parcijalni izomorfizam*.

Definicija. Neprazna familija parcijalnih izomorfizama $\mathcal{T}$ je *tamo-amo sistem* ako:

- za svako $(\bar{a} \mapsto \bar{b}) \in \mathcal{T}$ i svako $c \in A$ postoji $d \in B$ tako da $(\bar{a}c \mapsto \bar{b}d) \in \mathcal{T}$;
- za svako $(\bar{a} \mapsto \bar{b}) \in \mathcal{T}$ i svako $d \in B$ postoji $c \in A$ tako da $(\bar{a}c \mapsto \bar{b}d) \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{A} \equiv_{ta} \mathcal{B}$ znači da postoji tamo-amo sistem između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Primer. Ako $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models DLO$, onda $\mathcal{A} \equiv_{ta} \mathcal{B}$.

Teorema. Ako $\mathcal{A} \equiv_{ta} \mathcal{B}$, onda $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Posledica. DLO je potpuna teorija.

Komentar. Obratna implikacija u teoremi ne važi.

Teorema. Ako $\mathcal{A} \equiv_{ta} \mathcal{B}$, i $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su prebrojive, onda $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Posledica (Kantor). Svaka dva prebrojiva gusta linearna uređenja bez krajeva su izomorfna.

Lema. Neka $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models ACF_0$, $\bar{a} \in \mathcal{A}^n$ i $\bar{b} \in \mathcal{B}^n$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

$$(1) (\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_{qf} (\mathcal{B}, \bar{b});$$

$$(2) (\forall f(\bar{X}) \in \mathbb{Z}[\bar{X}]) (f(\bar{a}) = 0 \iff f(\bar{b}) = 0);$$

$$(3) \text{ postoji } \eta : \mathbb{Q}(\bar{a}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}(\bar{b}) \text{ takav da } \eta(\bar{a}) = \bar{b}.$$

Teorema o dizanju izomorfizma. Neka je $\eta : F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$.

- (a) Neka je c algebarski nad F_1 , i $m(X) \in F_1[X]$ minimalni polinom za c . Neka je d koren polinoma $\eta m(X)$. Tada postoji:

$$\hat{\eta} : F_1(c) \xrightarrow{\cong} F_2(d) \text{ takav da } \hat{\eta}|_{F_1} = \eta \text{ i } \hat{\eta}(c) = d.$$

- (b) Neka je c transcendentan nad F_1 , i d transcendentan nad F_2 . Tada postoji:

$$\hat{\eta} : F_1(c) \xrightarrow{\cong} F_2(d) \text{ takav da } \hat{\eta}|_{F_1} = \eta \text{ i } \hat{\eta}(c) = d.$$

Teorema. ACF_0 je potpuna.

Erenfojht-Frajseove igre

Definicija. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$ -strukture. *Erenfojht-Frajseova igra* $EF(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ je sledeća igra za dva igrača. U n -tom koraku igrač I bira proizvoljan element $x \in A \cup B$. Ako je igrač I izabrao $a_n := x \in A$, igrač II bira $b_n \in B$, a ako je igrač I izabrao $b_n := x \in B$, igrač II bira $a_n \in A$.

Igrač II pobeđuje ako $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_{qf} (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Teorema. $\mathcal{A} \equiv_{ta} \mathcal{B}$ ako i samo ako igrač II ima pobedničku strategiju za $EF(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.