



Aks–Grotendikova teorema II

– Uvod u teoriju modela –

Slavko Moconja

MATF

12.12.2025.

Definicija. Za polje F , označimo sa $AG(F)$ iskaz:

Za svako $n \geq 1$, svako 1-1 polinomijalno preslikavanje $F^n \rightarrow F^n$ je na.

Aks-Grotendikova teorema. Važi $AG(\mathbb{C})$.

Videli smo:

- „Svako 1-1 polinomijalno preslikavanje $(\text{domen})^n \rightarrow (\text{domen})^n$ definisano polinomima najviše stepena d je na.” je Π_2 -rečenica $\alpha_{n,d}$ na jeziku $\mathcal{L}_{Rng}$.
- Važi $AG(F) \iff (\forall n, d) F \models \alpha_{n,d}$.
- **Teorema.** Važi $AG(\overline{\mathbb{F}}_p)$ za sve proste brojeve p .

Skica dokaza. $E_k = \{x \in \overline{\mathbb{F}}_p : x^{p^k} - x = 0\}$ je konačno potpolje od $\overline{\mathbb{F}}_p$ i:

$$E_1 \leq E_2 \leq E_6 \leq \dots \leq E_{k!} \leq \dots \leq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k!} = \overline{\mathbb{F}}_p;$$

kako $E_k \models \alpha_{n,d}$ i $\alpha_{n,d}$ je Π_2 , sledi $\overline{\mathbb{F}}_p \models \alpha_{n,d}$. $\square$

Teorija linearnih uređenja LO sadrži sledeće rečenice:

- $\forall x \neg x < x$;
- $\forall xyz (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$;
- $\forall xy (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Teorija gustih linearnih uređenja DLO_0 sadrži LO i:

- $\forall xy (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$.

Teorija gustih linearnih uređenja bez krajeva DLO sadrži DLO_0 i:

- $\varphi_m := \forall x \exists y y < x$;
- $\varphi_M := \forall x \exists y x < y$.

Teorija $DLO_{-\infty} := DLO_0 \cup \{\neg\varphi_m, \varphi_M\}$ je *teorija gustih linearnih uređenja sa levim krajem*, $DLO_{+\infty} := DLO_0 \cup \{\varphi_m, \neg\varphi_M\}$ je *teorija gustih linearnih uređenja sa desnim krajem*, i $DLO_{\pm\infty} := DLO_0 \cup \{\neg\varphi_m, \neg\varphi_M\}$ je *teorija gustih linearnih uređenja sa krajevima*.

Teorija grupa Gp sadrži sledeće rečenice:

- $\forall xyz \ x * (y * z) = (x * y) * z;$
- $\forall x \ x * e = x;$
- $\forall x \ x * x^{-1} = e.$

Teorija Abelovih grupa AGp dodatno sadrži i:

- $\forall xy \ x * y = y * x.$

Teorija komutativnih prstena sa jedinicom Rng sadrži sledeće rečenice:

- $-0 = 1$;
- $\forall xyz \ x + (y + z) = (x + y) + z$;
- $\forall x \ x + 0 = x$;
- $\forall x \ x + (-x) = 0$;
- $\forall xy \ x + y = y + x$;
- $\forall xyz \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- $\forall x \ x \cdot 1 = x$;
- $\forall xy \ x \cdot y = y \cdot x$;
- $\forall xyz \ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Teorija integralnih domena ID dodatno sadrži:

- $\forall xy \ (x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0)$.

Teorija polja Fld sadrži Rng i:

- $\forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y \ x \cdot y = 1).$

Teorija algebarski zatvorenih polja ACF dodatno sadrži i:

- $\forall y_0 \dots y_{n-1} \exists x \ x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \dots + y_1x + y_0 = 0$, za sve $n \geq 1$.

Za prost broj p uočimo rečenicu:

- $\chi_p := \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ puta}} = 0.$

Teorija algebarski zatvorenih polja karakteristike p je:

- $ACF_p = ACF \cup \{\chi_p\}.$

Teorija algebarski zatvorenih polja karakteristike 0 je:

- $ACF_0 = ACF \cup \{\neg\chi_p : p \text{ prost}\}.$

Definicija. Rečenica φ je *logička posledica* teorije T , $T \models \varphi$, ako za svaku strukturu $\mathcal{A}$ važi:

$$\mathcal{A} \models T \implies \mathcal{A} \models \varphi.$$

Definicija. Teorija T je *potpuna* ako za svaku rečenicu φ važi:

$$T \models \varphi \text{ ili } T \models \neg\varphi.$$

Primer. *Fld* i *ACF* nisu potpune.

Teorema (p prost ili $p = 0$). ACF_p je potpuna.

Posledica (p prost ili $p = 0$). Za svaku $\mathcal{L}_{Rng}$ -rečenicu φ sledeći iskazi su ekvivalentni:

- (1) $ACF_p \models \varphi$;
- (2) φ je tačna u svim algebarski zatvorenim poljima karakteristike p ;
- (3) φ je tačna u bar jednom algebarski zatvorenom polju karakteristike p .

Posledica (p prost). Za sve n, d , $ACF_p \models \alpha_{n,d}$. Dakle, $AG(F)$ važi za sva algebarski zatvorena polja proste karakteristike.

Definicija. Neka je T $\mathcal{L}$ -teorija.

1. T je *zadovoljiva* ako ima model;
2. T je *konačno zadovoljiva* ako svaki konačan podskup od T ima model.

Komentar. T je zadovoljiva $\implies T$ je konačno zadovoljiva.

Teorema kompaktnosti (Gedel 1929, Maljcev 1936).

T je zadovoljiva $\iff T$ je konačno zadovoljiva.

Teorema kompaktnosti. Neka je T teorija i φ rečenica.

$$T \models \varphi \iff (\exists T_0 \subseteq_{kon.} T) T_0 \models \varphi.$$

Teorema. Neka je φ $\mathcal{L}_{Rng}$ -rečenica. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

- (1) $ACF_0 \models \varphi$;
- (2) $ACF_p \models \varphi$ za skoro sve proste p ;
- (3) $ACF_p \models \varphi$ za beskonačno mnogo prostih p .

Posledica Za sve n, d , $ACF_0 \models \alpha_{n,d}$. Dakle, $AG(F)$ važi za sva algebarski zatvorena polja karakteristike 0. Specijalno, $AG(\mathbb{C})$ važi.

Teorema (Neter 1922, Ostrovski 1919). Polinom $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ je apsolutno nerastavljiv ako i samo ako je $f \bmod p$ apsolutno nerastavljiv za skoro sve proste p .

Definicija. T je *konačno potpuna* ako je konačno zadovoljiva i za svaku rečenicu φ važi $\varphi \in T$ ili $\neg\varphi \in T$ (ali, zbog konačne zadovoljivosti, ne oba).

Teorema. Neka je T konačno zadovoljiva $\mathcal{L}$ -teorija. Tada postoji konačno potpuna $\mathcal{L}$ -teorija T' takva da $T \subseteq T'$.

Aksioma izbora (Cornova lema). Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija skupova. Pretpostavimo da za svaki neprazan lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ važi $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$. Tada $\mathcal{F}$ ima maksimalan element.

Neka je v_0 fiksirana promenljiva.

Definicija. $\mathcal{L}$ -teorija T je *Henkinova* ako za svaku $\mathcal{L}$ -formulu $\varphi(v_0)$ postoji simbol konstante $c \in \mathcal{L}$ takav da $(\exists v_0 \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(c)) \in T$.

Komentar. Ako je $\mathcal{L}$ -teorija T Henkinova i T' $\mathcal{L}$ -teorija takva da $T' \supseteq T$, očigledno je i T' Henkinova.

Lema. Neka je T konačno zadovoljiva $\mathcal{L}$ -teorija. Tada postoje $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ -teorija $T' \supseteq T$ takvi da:

- $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ čine simboli konstanti,
- $\|\mathcal{L}'\| = \|\mathcal{L}\|$,
- T' je konačno zadovoljiva, i
- za svaku $\mathcal{L}$ -formulu $\varphi(v_0)$ postoji $c \in \mathcal{L}'$ takav da $(\exists v_0 \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(c)) \in T'$.

Teorema. Neka je T konačno zadovoljiva $\mathcal{L}$ -teorija. Tada postoje $\mathcal{L}^H \supseteq \mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^H$ -teorija $T^H \supseteq T$ takvi da:

- $\mathcal{L}^H \setminus \mathcal{L}$ čine simboli konstanti,
- $\|\mathcal{L}^H\| = \|\mathcal{L}\|$,
- T^H je konačno zadovoljiva, i
- T^H je Henkinova.

Teorema. Neka je T $\mathcal{L}$ -teorija koja je konačno potpuna (specijalno, konačno zadovoljiva) i Henkinova. Tada postoji model $M \models T$ takav da $|M| \leq \|\mathcal{L}\|$.

Posledica. Teorema kompaktnosti.

- Neka je T konačno potpuna i Henkinova.
- Neka je $C \subseteq \mathcal{L}$ skup simbola konstanti; $C \neq \emptyset$.
- Definišimo na C relaciju $\sim$ sa:

$$c \sim d \quad : \Longleftrightarrow \quad (c = d) \in T.$$

- **Tvrđenje A.** Relacija $\sim$ je ekvivalencija na C .
- Neka je $A := \{[c] : c \in C\}$; primetimo $|A| \leq |C| \leq |\mathcal{L}| \leq \|\mathcal{L}\|$.
- Na skupu A definišemo $\mathcal{L}$ -strukturu $\mathcal{A}$ sa:
 - $c^{\mathcal{A}} = [c]$ za simbol konstante c ;
 - $f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) := [d]$ ako $(f(c_1, \dots, c_n) = d) \in T$ za funkcijski simbol f arnosti n ;
 - $R^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) : \Longleftrightarrow R(c_1, \dots, c_n) \in T$ za relacijski simbol R arnosti n .
- **Tvrđenje B.** Interpretacije funkcijskih i relacijskih simbola su dobro definisane.

- Cilj je da dokažemo da $\mathcal{A} \models T$.
- **Tvrđenje C.** Za svaki term $t(\bar{x})$ važi $t^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) = [d]$ ako i samo ako $(t(c_1, \dots, c_n) = d) \in T$.
- **Tvrđenje D.** Za svaku formulu $\varphi(\bar{x})$ važi $\mathcal{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n])$ ako i samo ako $\varphi(c_1, \dots, c_n) \in T$.
- **Kraj dokaza.** Specijalno, prema tvrđenju D, za svaku rečenicu φ važi $\mathcal{A} \models \varphi$ ako i samo ako $\varphi \in T$; dakle, $\mathcal{A} \models T$.

Donja LST teorema. Zadovoljiva $\mathcal{L}$ -teorija ima model kardinalnosti $\leq \|\mathcal{L}\|$.

Gornja LST teorema. Ako $\mathcal{L}$ -teorija T ima beskonačan model, onda ona ima model kardinalnosti κ za svako $\kappa \geq \|\mathcal{L}\|$.

Karakterizacija podstrukture. Neka je T teorija i $\mathcal{A}$ struktura. Tada:

$$\mathcal{A} \models T_{\forall} \iff (\exists \mathcal{B} \models T) \mathcal{A} \leq \mathcal{B},$$

gde $T_{\forall} = \{\varphi \in \Pi_1 : T \models \varphi\}$.

Primer. $Fld_{\forall} \equiv ACF_{\forall} \equiv ID$.