

Класификација ендоморфизама кохомолошких прстена многострукости Застава

Матеј Милићевић

Универзитет у Београду, Математички факултет

22. април 2026.

Својство фиксне тачке

Дефиниција

Тополошки простор X има својство фиксне тачке (СФТ) ако за свако непрекидно пресликавање $f : X \rightarrow X$ постоји $x \in X$ такво да $f(x) = x$.

Пример (Брауерова теорема)

Затворени диск има својство фиксне тачке.

Својство фиксне тачке

Нека је G коначно генерисана Абелова група, T њена торзиона подгрупа и $\phi \in \text{End}(G)$. Тада је

$$\bar{\phi} : G/T \rightarrow G/T, [g] \mapsto [\phi(g)],$$

добро дефинисан ендоморфизам и има матрицу A у односу на базу слободне Абелове групе G/T .

Дефиниција

Траг ендоморфизма $\phi : G \rightarrow G$ коначно генерисане Абелове групе G је

$$\text{Tr}(\phi, G) = \text{Tr}(A).$$

Својство фиксне тачке

Дефиниција

Нека је R главноидеалски домен, X тополошки простор такав да је за сваки цео број $i \geq 0$ хомолошка група $H_i(X; R)$ коначно генерисана и $H_j(X; R) = 0$ почевши од неког j . Тада за непрекидно пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинишемо Лефшецов број

$$L_R(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Tr}(f_*, H_i(X; R)).$$

Такође важи да је

$$L_R(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Tr}(f^*, H^i(X; R)).$$

Својство фиксне тачке

Теорема (Лефшец)

Нека је X компактан тополошки простор који има структуру многострукости или CW -комплекса, R главноидеалски домен и нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Ако је $L_R(f) \neq 0$, тада пресликавање f има фиксну тачку.

Пример

Комплексни пројективни простор CP^n има својство фиксне тачке ако и само ако је n паран број.

Комплексни пројективни простор и СФТ

- ▶ $n = 2k$: $H^*(\mathbb{C}P^{2k}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c] / \langle c^{2k+1} \rangle$, $\dim(c) = 2$. За непрекидно пресликавање $f : \mathbb{C}P^{2k} \rightarrow \mathbb{C}P^{2k}$, имамо $f^*(c) = mc$ за неко $m \in \mathbb{Z}$. Одатле следи

$$L_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}P^{2k}) = 1 + m + m^2 + \cdots + m^{2k} \neq 0.$$

- ▶ $n = 2k - 1$: Пресликавање $f : \mathbb{C}^{2k} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{2k} \setminus \{0\}$, $(z_1, z_2, \dots, z_{2k-1}, z_{2k}) \mapsto (-\bar{z}_2, \bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_{2k}, \bar{z}_{2k-1})$, индукује непрекидно пресликавање $\mathbb{C}P^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{2k-1}$ које нема фиксну тачку.

Грасманове многострукости

Дефиниција

Нека је $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Штифелова многострукост $V_{k,n}(K)$ је скуп свих ортономираних k -торки у K^{n+k} .

Грасманова многострукост (Грасманијан) $G_{k,n}(K)$ је количнички простор добијен од $V_{k,n}(K)$ тако што поистоветимо све k -торке које разапињу исти k -димензионални потпростор.

Пример

$G_{1,n}(K)$ је заправо KP^n , $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Грасманове многострукости и СФТ

[L. O'Neill, 1974] On the Fixed Point Property for Grassmann Manifolds, Ph.D. dissertation, Ohio State University

Хипотеза

Грасманова многострукост $G_{k,n}(K)$ има својство фиксне тачке ако и само ако је $n \neq k$ и nk је паран.

О'Нил је показао да ако $G_{k,n}(K)$ има својство фиксне тачке, онда $n \neq k$ и nk је паран.

Грасманове многострукости и СФТ

- ▶ $k = n$: Пресликавање $g : G_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow G_{n,n}(\mathbb{R})$, $U \mapsto U^\perp$, је непрекидно које нема фиксне тачке.
- ▶ nk непаран: Пресликавање $g : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$,
 $(x_1, x_2, \dots, x_{n+k-1}, x_{n+k}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{n+k}, x_{n+k-1})$, је ортогонално, чије су све сопствене вредности комплексне. Оно индукује непрекидно пресликавање $\bar{g} : G_{k,n}(\mathbb{R}) \rightarrow G_{k,n}(\mathbb{R})$. Кад би постојао неки k -димензионални потпростор U који \bar{g} фиксира, онда би $g|_U$ имао сопствени вектор, а тиме и g што је немогуће јер g нема реалне сопствене вредности.

Многострукости застава

Дефиниција

Нека је $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Многострукост застава $F_K(n_1, \dots, n_r)$, где $r \geq 2$, $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ и $n = n_1 + \dots + n_r$, је простор уређених r -торки (V_1, \dots, V_r) међусобно ортогоналних векторских потпростора од K^n таквих да је $\dim_K(V_i) = n_i$.

Пример

- ▶ $r = 2$: $F_K(n_1, n_2) = G_{n_1, n_2}(K)$;
- ▶ $n_1 = \dots = n_r = 1$: комплетна многострукост застава.

Многострукости застава и СФТ

[H.H. Glover, W.D. Homer, 1982] Fixed Points on Flag Manifolds, *Pacific J. Math.*

Хипотеза

Многострукост застава $F_K(n_1, \dots, n_r)$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, има својство фиксне тачке ако и само ако су бројеви n_i међусобно различити и највише један од њих је непаран.

Главер и Хомер су показали да је услов да су бројеви n_i међусобно различити и највише један од њих непаран неопходан да $F_K(n_1, \dots, n_r)$ има својство фиксне тачке.

Индекс некоинциденције

Нека је M повезана тополошка многострукост. Кажемо да су непрекидна пресликавања $f, g : M \rightarrow M$ коинцидентна ако постоји $x \in M$ такво да $f(x) = g(x)$.

Дефиниција

Нека је m највећи број непрекидних пресликавања на M таквих да ниједно нема СФТ и никоја два нису међусобно коинцидентна. Тада дефинишемо индекс некоинциденције многострукости M са

$$NI(M) = \begin{cases} m + 1, & m \text{ је коначан,} \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Индекс некоинциденције

- ▶ $r = 2$, $n_1 \leq 3$ или $n_2 \geq 2n_1^2 - n_1 - 1$: [H.H. Glover, W.D. Homer, 1978] Endomorphisms of the Cohomology Ring of Finite Grassmann Manifolds, *Lecture Notes in Math.*
- ▶ $r = 3$, $n_1 = 1$ и $n_3 \geq 2n_2^2 - 1$: [H.H. Glover, W.D. Homer, 1981] Self-maps of Flag Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*
- ▶ $n_1 = \dots = n_r = 1$: [M. Hofman, 1984] On Fixed Free Point Maps of the Complex Flag Manifolds, *Indiana U. Math. J.*
- ▶ $n_1 = \dots = n_{r-1} = 1$: [M. Hofman, 1984] Noncoincidence Index of Manifolds, *Pacific J. Math.*
- ▶ $n_1 = \dots = n_{r-2} = 1$, $n_{r-1} \geq 2$ и $n_r \geq 2n_{r-1}^2 - 1$: [M. Milićević, M. Radovanović, 2022] On Self-maps of Complex Flag Manifolds, *J. Fixed Point Theory Appl.*

Индекс некоинциденције

[M. Hofman, 1989] Noncoincidence Index, Free Group Actions and the Fixed Point Property for Manifolds, *Pacific J. Math.*

Индекс некоинциденције може да се израчуна за $F_{\mathbb{C}}(n_1, \dots, n_r)$ (осим кад $r = 3$, $n_1 = n_2 = 1$ и n_3 паран) кад су једини ендоморфизми кохомолошког прстена пројективни или градирани ендоморфизми.

Кохомологија комплексних многострукости застава

[A. Borel, 1953] Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts, *Ann. of Math.*

За многострукост застава $F := F_{\mathbb{C}}(1^{\dots j}, k, m)$ имамо опис кохомолошког прстена

$$H^*(F; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k] / I_F, \dim(x_i) = 2, \dim(y_i) = 2i,$$

где је $I_F = \langle z_{m+1}, \dots, z_n \rangle$, $n := j + k + m$ и важи

$$\sum_{i \geq 0} z_i \cdot \prod_{s=1}^j (1 + x_s) \cdot (1 + y_1 + \dots + y_k) = 1.$$

Пројективни и градирани ендоморфизми

- ▶ Кажемо да је ендоморфизам $\varphi : H^*(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(F; \mathbb{Z})$ пројективан ако за свако $z \in H^*(F; \mathbb{Z})$, $\varphi(z)$ је полином по x_i за фиксирано $i \in [j]$.
- ▶ Кажемо да је ендоморфизам $\varphi : H^*(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(F; \mathbb{Z})$ градиран ако постоји $\pi \in \mathfrak{S}_j$ и $\lambda \in \mathbb{Z}$ такви да

$$\varphi(x_i) = \lambda x_{\pi(i)} \text{ за све } i \in [j],$$

$$\varphi(y_i) = \lambda^i y_i \text{ за све } i \in [k].$$

Пројективни и градирани ендоморфизми

[H.H. Glover, W.D. Homer, 1981] Self-maps of Flag Manifolds,
Trans. Amer. Math. Soc.

Хипотеза

Сваки ендоморфизам

$H^*(F_{\mathbb{C}}(n_1, \dots, n_r); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(F_{\mathbb{C}}(n_1, \dots, n_r); \mathbb{Z})$ је пројективан
или градиран.

Теорема

Ако је $k \geq 2$ и $m \geq 2k^2 - 1$, онда је сваки ендоморфизам

$H^*(F_{\mathbb{C}}(1^{\cdots j}, k, m); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(F_{\mathbb{C}}(1^{\cdots j}, k, m); \mathbb{Z})$ пројективан или
градиран.

Пројективни и градирани ендоморфизми

$$A_{j,k,m} := \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k] / I_{j,k,m}, \dim(x_i) = 2, \\ \dim(y_i) = 2i, I_{j,k,m} := I_F = \langle z_{m+1}, \dots, z_n \rangle, n = j + k + m.$$

Ендоморфизам $\varphi : A_{j,k,m} \rightarrow A_{j,k,m}$ је индукован јединственим ендоморфизмом θ градуисаног прстена

$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k]$ таквим да:

- (1) $\theta(I_{j,k,m}) \subseteq I_{j,k,m}$;
- (2) за све $i \in [j]$, $\theta(x_i) = a_i x_{\pi(i)}$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, а $\pi : [j] \rightarrow [j]$ је нека функција.

Висина класе

Дефиниција

Висина класе $c \in H^*(F_{\mathbb{C}}(n_1, \dots, n_r); \mathbb{Z})$, у ознаци $\text{ht}(c)$, је највеће $d \in \mathbb{N}$ такво да $c^d \neq 0$.

[S.A. Broughton, M. Hoffman, W. Homer, 1983] The Height of Two-dimensional Cohomology Classes of Complex Flag Manifolds, *Canad. Math. Bull.*

Став

Ненула елементи минималне висине у кохомолошкој групи $H^2(F; \mathbb{Z})$ су $a_i x_i$, за све $i \in [j]$ и $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Висина ових класа је $n - 1$.

Пројективни и градирани ендоморфизми

- ▶ $\theta(z_{m+1}) \neq 0$: У овом случају добијамо да је φ градирани ендоморфизам.

1° $j = 1$: [Н.Н. Glover, W.D. Homer, 1981] Self-maps of Flag Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*

2° $j \geq 2$: Фиксирамо идеал $I := \langle x_2, \dots, x_j \rangle$. Пресликавање $\psi : \mathbb{Z}[x_1, y_1, \dots, y_k] \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, y_1, \dots, y_k]$ дато са

$$\psi(x_1) = \theta(x_1) \bmod I \text{ и } \psi(y_i) = \theta(y_i) \bmod I, \quad i \in [k],$$

индукује ендоморфизам на $A_{1,k,m}$. Из тога ће следити да је ендоморфизам φ (ког индукује θ) градиран.

Пројективни и градирани ендоморфизми

- ▶ $\theta(z_{m+1}) = 0$: У овом случају добијамо да је φ пројективни ендоморфизам.

1° $j = 1$: [H.H. Glover, W.D. Homer, 1981] Self-maps of Flag Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*

2° $j \geq 2$: Пресликавање

$$\psi : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{j-1}, y_1, \dots, y_k] \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{j-1}, y_1, \dots, y_k]$$

дато са

$$\psi(p) = \theta(p) \bmod \langle x_j \rangle,$$

индукује ендоморфизам на $A_{j-1,k,m}$. Тада ψ у позитивним димензијама слика све у 0 или индукује $(j-1)$ -пројективни ендоморфизам. Одатле се закључује да је φ пројективан (покаже се директно или прво да је j -пројективан).

Ендоморфизми кохомолошких прстена реалних многострукости застава

У реалном случају, имамо ендоморфизме у кохомологији који нису ни градирани, ни пројективни.

- ▶ [L. O'Neill, 1974] On the Fixed Point Property for Grassmann Manifolds, Ph.D. dissertation, Ohio State University
- ▶ [M. Milićević, M. Radovanović, 2022] Endomorphisms of real Grassmannians that commute with Steenrod squares, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*
- ▶ [M. Milićević] Endomorphisms of \mathbb{Z}_2 -cohomology for some real flag manifolds

Ендоморфизми кохомолошких прстена реалних многострукости застава

[A. Borel, 1953] La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes, *Comm. Math. Helv.*

За многострукост застава $F := F_{\mathbb{R}}(1^{\dots k}, m)$ имамо опис кохомолошког прстена

$$H^*(F; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_k] / I_F, \dim(x_i) = 1,$$

где је $I_F = \langle z_{m+1}, \dots, z_{m+k} \rangle$ и важи

$$(1 + z_1 + z_2 + \dots) \prod_{i=1}^k (1 + x_i) = 1.$$

Еквивалентно, $z_d = h_d(x_1, \dots, x_k)$ где је $h_d(x_1, \dots, x_k)$ комплетан хомогени симетрични полином степена d са k променљивих.

Эндоморфизми кохомолошких прстена реалних многострукости застава

Теорема

Нека је $F = F_{\mathbb{R}}(1^{\cdots k}, m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ и $m \geq 2$. Нека је s јединствени природан број такав да $2^s < m + k \leq 2^{s+1}$. Ако $m + k \leq 2^{s+1} - 2$, тада је сваки ендоморфизам од $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ или градиран или пројективан.

Ендоморфизми кохомолошких прстена реалних многострукости застава

[J. Korbaš, J. Lörinc, 2003] The \mathbb{Z}_2 -cohomology cup-length of real flag manifolds, *Fund. Math.*

Став

Ненула елементи минималне висине у кохомолошкој групи $H^1(F; \mathbb{Z}_2)$ су x_i , за све $i \in [k]$. Висина ових класа је $m + k - 1$.

[Z. Petrović, B. Prvulović, M. Radovanović, 2020] Gröbner basis for (partial) flag manifolds, *J. Symb. Comput.*

Став

Адитивна база од $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ је дата са

$$\mathcal{B}_F = \{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} \mid a_1 \leq m, a_2 \leq m + 1, \dots, a_k \leq m + k - 1\}.$$

Эндоморфизми кохомолошких прстена реалних многострукости застава

Теорема

Нека су a, b ненегативни цели бројеви и

$$a = \sum_{i=0}^l a_i 2^i \quad \text{и} \quad b = \sum_{i=0}^l b_i 2^i, \quad a_i, b_i \in \{0, 1\}, \quad i \in [l],$$

за неки природан број l . Тада важи следећа конгруенција

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^l \binom{a_i}{b_i} \pmod{2}.$$

Ендоморфизми кохомолошких прстена реалних многострукости застава

За $m + k \in \{2^{s+1} - 1, 2^{s+1}\}$ могу да се појаве и други типови ендоморфизама.

Пример

За $k = 3$ и $m = 4$, са $\varphi_4(x_1) = x_1$, $\varphi_4(x_2) = x_2$ и $\varphi_4(x_3) = x_1 + x_2$ је дефинисан један ендоморфизам од $H^*(F_{\mathbb{R}}(1, 1, 1, 4); \mathbb{Z}_2)$ који није ни градиран, ни пројективан.

Пример

За $k = 3$ и $m = 5$, са $\varphi_5(x_1) = x_1$, $\varphi_5(x_2) = x_2$ и $\varphi_5(x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ је дефинисан један ендоморфизам од $H^*(F_{\mathbb{R}}(1, 1, 1, 5); \mathbb{Z}_2)$ који није ни градиран, ни пројективан.

Ендоморфизми кохомолошких прстена реалних многострукости застава

Теорема

Нека је $F = F_{\mathbb{R}}(1, 1, m)$, где $m \in \{2^{s+1} - 1, 2^{s+1}\}$ за неко $s \in \mathbb{N}$.

- i)* Ако $m + 2 = 2^{s+1} - 1$, тада је сваки нетривијалан ендоморфизам од $\varphi : H^*(F; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ или градиран или пројективан или задовољава $\varphi(x_{i_1}) = x_1 + x_2$, $\varphi(x_{i_2}) = x_i$, где $i_1, i_2, i \in [2]$ и $i_1 \neq i_2$.
- ii)* Ако $m + 2 = 2^{s+1}$, тада је сваки нетривијалан ендоморфизам од $\varphi : H^*(F; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ или градиран или пројективан или задовољава $\varphi(x_1) = a_1(x_1 + x_2)$, $\varphi(x_2) = a_2(x_1 + x_2)$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2$ и $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.